第 43 講　必要条件からヒントを得る

43　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とする．すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数となるような実数 a，b，c の条件を求めよ．

(2)　$f(x)=x^2+px+q$ とする．すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるような p と q の値を求めよ．

(3)　$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．

$$\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=0$$

が任意の実数 x について成り立つとき，α と β の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　必要条件からヒントを得る

43　任意の自然数 n に対して，$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}$ をある素数 p で割ったときの余りが常に 1 になるとする．その素数 p を求めよ．

【選択肢】

㋐　$p=2$　　㋑　$p=3$　　㋒　$p=5$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　必要条件からヒントを得る

43　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とする．すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数となるような実数 a，b，c の条件を求めよ．

(2)　$f(x)=x^2+px+q$ とする．すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるような p と q の値を求めよ．

(3)　$0<\alpha<\beta<2\pi$ とする．

$$\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=0$$

が任意の実数 x について成り立つとき，α と β の値を求めよ．

【答】　(1) $a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$，$c=m$（k，l，m は整数）

(2) $(p,\ q)=(0,\ 0)$，$(0,\ -1)$，$(-1,\ 0)$，$(-2,\ 1)$　(3) $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$，$\beta=\dfrac{4}{3}\pi$

【解答】

(1)　k，l，m を整数とする．

すべての整数 n に対して $f(n)$ が整数より，

$f(-1)=a-b+c$，$f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$ は整数であるので

$$a+b=k\quad\cdots\cdots①,\quad a-b=l\quad\cdots\cdots②,\quad c=m$$

と表せる．①と②より $a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$ を得る．

このとき

$$f(n)=\frac{k+l}{2}n^2+\frac{k-l}{2}n+m=\frac{n(n+1)}{2}k+\frac{n(n-1)}{2}l+m$$

であるから，n が整数なら n と $n+1$ の一方は偶数となり $n(n+1)$ は偶数，つまり $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数となる．同様に，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ も整数.

よって $f(n)$ は整数である．

ゆえに求める条件は

$$\boldsymbol{a=\frac{k+l}{2},\ b=\frac{k-l}{2},\ c=m}\ \textbf{（}\boldsymbol{k,\ l,\ m}\ \textbf{は整数）}$$

(2)　すべての自然数 n に対して $f(x^n)$ が $f(x)$ で割り切れるので，$f(x^2)$ も $f(x)$ で割り切れる．ここで

$$\begin{aligned}f(x^2)&=x^4+px^2+q\\&=f(x)(x^2-px+p^2+p-q)+p(-p^2-p+2q)x+q(-p^2-p+q+1)\end{aligned}$$

であるから，

$p(-p^2-p+2q)=0$ かつ $q(-p^2-p+q+1)=0$ となるので

$$\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases},\ \begin{cases}p=0\\-p^2-p+q+1=0\end{cases},\ \begin{cases}-p^2-p+2q=0\\q=0\end{cases},\ \begin{cases}-p^2-p+2q=0\\-p^2-p+q+1=0\end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これらより $(p,\ q)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 1)$

$p=q=0$ のとき，$f(x)=x^2$ より $f(x^n)=x^{2n}=x^2\cdot x^{2n-2}$ となるので $f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる.

$p=0,\ q=-1$ のとき，$f(x)=x^2-1$ より

$f(x^n)=x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots\cdots+x^2+1)$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる.

$p=-1,\ q=0$ のとき，$f(x)=x^2-x$ より

$f(x^n)=x^{2n}-x^n=(x^2-x)\cdot x^{n-1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる.

$p=-2,\ q=1$ のとき，$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ より

$f(x^n)=(x^n-1)^2=(x-1)^2(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)^2$ となるので，$f(x^n)$ は $f(x)$ で割り切れる.

$p=q=1$ のとき，$f(x)=x^2+x+1$ より

$f(x^3)=x^6+x^3+1=(x^2+x+1)(x^4-x^3+2x-2)+3$ となるので $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れない.

以上より求める p と q は $\boldsymbol{(p,\ q)=(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-2,\ 1)}$

(3)　与式に $x=0$ を代入すると $\sin 0+\sin(0+\alpha)+\sin(0+\beta)=0$

ゆえに $\sin\alpha+\sin\beta=0$　……①

$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=0$

ゆえに $\cos\alpha+\cos\beta=-1$　……②

①より $\sin\beta=-\sin\alpha$，②より $\cos\beta=-1-\cos\alpha$　……③

これらを $\sin^2\beta+\dfrac{\cos}{2}\beta=1$ に代入すると

$(-\sin\alpha)^2+(-1-\cos\alpha)^2=1$ より $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ となる．この結果と③より

$\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$ となるが，$0<\alpha<\beta<2\pi$ より $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{4}{3}\pi$ に決まる.

$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき

$$\begin{aligned}&\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)\\ &=\sin x+\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)\\ &=\sin x+\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\sin x\cos\frac{4}{3}\pi+\cos x\sin\frac{4}{3}\pi\right)\\ &=0\end{aligned}$$

となるので，求める α と β は $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{4}{3}\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第43講　必要条件からヒントを得る

43　任意の自然数 n に対して，$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}$ をある素数 p で割ったときの余りが常に1になるとする．その素数 p を求めよ．

【選択肢】

㋐　$p=2$　㋑　$p=3$　㋒　$p=5$

【答】 ㋒

【解答】

$5\cdot 2^n+(-4)^{n-1}=a_n$ とおく．

任意の n に対して a_n-1 は素数 p で割り切れることになる．

$a_1-1=10$，$a_2-1=15$ より，求める素数 p があるとすれば，それは10と15の最大公約数の5に限る．

以下，a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を5で割ったときの余りが1となることを数学的帰納法により示す．

$a_1=11$，$a_2=16$ である．

k が1以上のとき，a_k と a_{k+1} は5で割ったときの余りが1であると仮定する，つまり整数 l，m を用いて $a_k=5l+1$，$a_{k+1}=5m+1$ であると仮定すると

$$a_{k+2}+2a_{k+1}-8a_k=\{5\cdot 2^{k+2}+(-4)^{k+1}\}+2\{5\cdot 2^{k+1}+(-4)^k\}-8\{5\cdot 2^k+(-4)^{k-1}\}$$
$$=5\cdot 2^k(2^2+2\cdot 2-8)+(-4)^{k-1}\{(-4)^2+2(-4)-8\}=0$$

より $a_{k+2}=-2a_{k+1}+8a_k$ が成り立つが，$a_{k+2}=-2(5m+1)+8(5l+1)=5(8l-2m+1)+1$ より $n=k+2$ のときも，a_n を5で割ったときの余りは1になる．

以上より，求める p は $\boldsymbol{p=5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。